A partir de ce numéro, nous ouvrons une nouvelle rubrique consacrée à la " RECHERCHE SCIENTIFIQUE". Ce cahier de 4 pages recevra les communications, articles et résumés de thèses de chercheurs en Valorique.
Nous commencerons par la publication d'une étude de Bernard Yannou et Frej Limayem sur les méthodes de comparaison par paires, parmi lesquelles le tri croisé est la forme la plus répandue chez les "Avistes". Le volume de cet article nous oblige à le scinder en trois parties. La suite paraîtra donc dans les prochains numéros de la revue, en juillet et octobre.

Les méthodes de comparaison par paires

Intérêt fondamental, Méthodes pratiques, Avancées scientifiques, Logiciel

Première partie : Intérêt fondamental

Bernard Yannou[1], Frej Limayem
Ecole Centrale Paris,
Laboratoire Productique-Logistique
92295 Châtenay-Malabry

Résumé : Que le praticien du Management par la Valeur ou tout méthodologue d'entreprise ne s'y trompe pas : les techniques de Comparaisons par Paires (CP par la suite) ou encore de Tri Croisé (moins général), ayant pour but d'aboutir rapidement à une hiérarchisation ou à une pondération d'éléments, ne se limitent pas à un petit outil trivial. En effet, elles sont des outils fondamentaux du domaine de l'aide à la décision et font l'objet d'une littérature scientifique abondante dans les 20 dernières années.

Après avoir replacé les méthodes de CP dans un contexte large d'aide à la décision (première partie), nous présenterons ensuite (deuxième partie) les grandes méthodes connues de la littérature. Le praticien y trouvera ici son compte car ces approches sont pour la plupart facilement mises en œuvre avec un tableur de type Excel. De plus, ces méthodes validées scientifiquement donnent des résultats exacts, contrairement à des utilisations erronées du Tri Croisé qui sont hélas monnaie courante.

Enfin, dans une dernière partie, nous montrerons comment une partie de ces avancées récentes ont été intégrées au sein d'un logiciel dès à présent disponible[2].

1. Les méthodes de comparaison par paires et l'aide à la décision

L'aide à la décision est un domaine scientifique et une problématique économique, sociale, politique et industrielle d'importance. Rappelons que l'objectif est le choix d'une ou de plusieurs alternatives (de décisions ou de concepts de solution en conception, etc.) ou le classement de celles-ci sur la base d'un certain nombre de critères. Il existe donc déjà directement un rapport avec les notions de Cahier des Charges (via les critères attendus) et de sélection de solutions.

Très schématiquement, deux écoles scientifiques s'opposent à l'échelle internationale.

[1] Maître de Conférences, animateur de la liste de diffusion Vafore (Valeur, Fonction, Recherche), inscription par mail vide à vafore-abonnement@yahoogroupes.fr

[2] Contacter la société Mktools (http://tcmc.mktools.com ou http://www.mktools.com/tcmc) ou B. Yannou (yannou@pl.ecp.fr) pour des renseignements ou une version de démonstration.

D'un coté l'école française constructiviste, menée par Roy [12] ne suppose aucun schéma prédéfini de préférences dans l'esprit du décideur (le concepteur-réalisateur[3]) avant que le processus de choix débute. En d'autres termes cela signifie que le choix va se faire à partir des préférences affichées du décideur directement entre les alternatives (éléments, décisions ou solutions) et la façon dont elles satisfont les critères (critères d'appréciation) que nous appellerons attributs (performances fonctionnelles des solutions). Les méthodes ELECTRE fort connues sont basées sur l'enregistrement de préférences fortes, faibles ou d'indifférence entre les attributs des alternatives. Lorsque ces préférences ne sont pas en nombre suffisant pour départager les alternatives, des questions peuvent être posées au décideur. Un exemple d'utilisation en ingénierie est donné dans [8]. On voit ici que la base de la décision est la comparaison de paires d'attributs.

De l'autre coté, l'école normative américaine considère qu'un schéma de préférences global peut être exprimé avant de prendre en compte les alternatives, sous la forme d'une agrégation de préférences entre critères (via éventuellement un arbre fonctionnel). C'est probablement l'approche la plus utilisée en ingénierie de la conception. Un courant de recherche américain très prononcé ces dernières années est l'agrégation de préférences en ingénierie (voir [1; 10]) qui consiste à étendre un cahier des charges en une fonction d'évaluation d'un produit. Une tentative a été faite en France avec l'approche SPEC [3; 17], mais les européens semblent plutôt absents. Ce courant de recherche a pris sa source de la *théorie de l'utilité* (voir par exemple [4; 15]), développée dans les années 60 qui cherche à chiffrer l'utilité d'une alternative (décision ou produit) par une seule valeur chiffrée. Notons que les formules d'utilité sont souvent des moyennes pondérées d'utilités élémentaires, et que les méthodes de « scoring » utilisées pour prendre des décisions en conception (citons une référence internationale en conception de produit qui le préconise : l'ouvrage de Pahl et Beitz [11], ainsi que de nombreux ouvrages d'AV) ou en marketing en sont une vulgarisation extrême.

Notons que cette théorie de l'utilité nous semble être la base théorique aux notions de valeur quantifiée en MV et de fonction objectif en recherche opérationnelle, mais qu'elle est trop souvent ignorée ou méconnue. En effet, la condition d'existence d'un tel chiffrage impose des conditions draconiennes sur la rationalité des participants[4] au projet et sur le processus de prise de décision (ou du projet). Cela provient du fait que le *théorème d'impossibilité de Arrow* [2] stipule que même si les participants à un projet sont tous rationnels, le résultat du projet a toutes les chances d'être irrationnel (et donc de ne correspondre aux préférences de quiconque). Une condition nécessaire pour éviter cela, mais non suffisante, est la définition d'un cahier des charges commun. Cette question est débattue dans les papiers de Hazelrigg[5] [5; 6], qui est le directeur de Programme « Ingénierie de la conception et de l'intégration » à la National Science Foundation, l'organisme de financement public de recherche américain. Dans une étude ultérieure, Hazelrigg [18] montre, toujours de manière assez théorique, qu'un autre moyen de réduire ce problème d'irrationalité dans le résultat des actions des acteurs d'une entreprise est que tous les acteurs aient un état d'esprit orienté « profits de l'entreprise ». Beau soutien au Management par la Valeur, non ? De la part de quelqu'un qui, non seulement a une position importante entre l'industrie et la recherche américaines, mais dont les articles sont parmi les plus référencés scientifiquement.

[3] Nous tentons de traduire les termes spécifiques du domaine de l'aide à la décision dans les termes usuels de notre domaine fonctionnel/valeur.

[4] La rationalité d'un individu est définie par son aptitude à exprimer un ensemble de préférences entre paires d'éléments qui soit cohérent au sens de la relation d'ordre. Si A est préféré à B s'écrit A>B, on ne doit pas avoir A>B>C>A.

[5] Hazelrigg souligne l'identité entre utilité et valeur.

Il s'agit d'une question fondamentale dont nous ne débattrons pas plus ici mais qui nous fait dire comme Herman et Koczkodaj [7] que les méthodes de CP permettent de résoudre une partie de ces problèmes d'irrationalité. De plus, nous venons de montrer que la comparaison qualitative ou quantitative[6] de paires de critères ou d'attributs est au cœur de toute la théorie d'aide à la décision.

Illustrons cela par l'évocation d'une méthode très populaire d'aide à la décision qui se situe à la frontière des deux écoles dont on a parlé : la méthode A.H.P., pour *Analytic Hierarchy Process*. Le succès de cette méthode, que tout lecteur pourra appliquer, s'explique par sa simplicité, et explique en grande partie l'engouement scientifique sur les méthodes de Comparaison par Paires depuis 20 ans.

Plaçons-nous dans le cadre de l'évaluation de produits[7] notés P_i pour $i=1,\dots,n$. Ces produits sont évalués à l'aune des critères C_j pour $j=1,\dots,m$. Chaque produit P_i a m attributs (ou performances propres) relativement aux m critères, l'attribut du produit P_i relativement au critère C_j étant noté A_{ij}. La méthode A.H.P. préconise une évaluation chiffrée résultant en un classement des P_i produits en 3 étapes :

1. Les critères C_j sont pondérés entre eux avec des poids $p_j,\ j=1,\dots,m$ totalisant 1 : $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$,
2. Pour chaque critère C_j, les attributs A_{ij}, pour i variant de 1 à n sont pondérés par des poids $a_{ij},\ i=1,\dots,n$ totalisant 1 sur les produits : $\forall i,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$,
3. La « valeur » du produit P_i est alors donnée par $v(P_i) = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot a_{ij}$

Rappelons que cette méthode proposée par Saaty [13; 14] il y a plus de 20 ans a déclenché un nombre très important de publications scientifiques. Une grande majorité concerne les méthodes de pondérations puisqu'il y a *(m+1)* pondérations à effectuer, et notamment les méthodes de CP puisque Saaty lui-même en a proposées.

2. Introduction aux méthodes de comparaison par paires

Prendre une décision en milieu professionnel peut souvent se résumer à donner des poids p_i, $i=1\dots n$, à n alternatives (appelés ici *éléments*). Une fois cette pondération attribuée, un choix peut se porter sur l'alternative ayant le poids le plus élevé, ou bien les poids servent à attribuer à chaque alternative un pourcentage de ressource : temps d'étude, crédit alloué, ou une estimation de l'*importance* d'une propriété : probabilité d'occurrence de cette alternative, risque, etc. Dans nos domaines, cela concerne la phase de hiérarchisation des fonctions, l'évaluation de solutions et la conception à coût objectif (répartition d'un coût sur les parties ou fonctions).

Le principe des méthodes de Comparaison par paires a été introduit par Thurstone en 1927 [16]. Ces méthodes permettent de simplifier le problème de distribution de 100% d'*importance* entre n éléments[8] lorsque cette pondération se fait au sein d'un groupe d'experts, appelés ici *décideurs*. La méthode consiste alors à *comparer* successivement les importances relatives de l'élément i et de l'élément j, par l'intermédiaire de l'estimation de

[6] Notons qu'une pondération d'éléments instaure une importance relative entre toute paire d'éléments.
[7] On pourrait remplacer par des principes de procédés P_{ri}, d'organisation O_i, etc…
[8] typiquement entre 3 et 10

leur rapport. On note une *comparaison* : $c_{ij} \approx p_i / p_j$, $i, j = 1...n$. Ces comparaisons[9] sont regroupées au sein d'une matrice de comparaisons carrée M :

$$M = \begin{pmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & c_{ij} & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{pmatrix}, \text{ notée } M = (c_{ij})$$

Dans le cas d'une prise de décision collégiale (cas par exemple d'un groupe de travail AV), les estimations de comparaisons sont effectuées dans le groupe en faisant appel à l'expertise de tous ses membres pour remplir la matrice *M*. D'une part se concentrer sur deux éléments permet d'avoir un débat plus constructif, d'autre part il est souvent plus serein car seuls les experts capables de parler des éléments *i* et *j* proposent leur vision aux autres. Ainsi on ne discute plus sur un classement final d'éléments établi on ne sait comment par chacun, mais on se met d'accord sur les comparaisons c_{ij} élémentaires. A charge ensuite à une méthode de Comparaisons par Paires de prendre en compte cette matrice *M* pour prédire un jeu de poids p_i, $i=1...n$ le plus représentatif de la composition des comparaisons. Ce résultat n'est alors pas remis en question, le groupe s'étant accordé lors du remplissage de la matrice.

Le jeu de poids solution n'est, en général, pas unique[10] et il existe une variété de méthodes car :

- Les n^2 comparaisons estimées peuvent être considérées comme autant d'équations et comme on a *n* inconnues de poids p_i à déterminer, le système a trop d'équations[11], donc il est incohérent et a priori insoluble. Les méthodes traduisent alors des logiques de compromis différentes.
- Selon que la matrice M présente des propriétés comme celle de *réciprocité*, les méthodes diffèrent. Une matrice est réciproque lorsque $c_{ij}=1/c_{ji}$; $i,j = 1..n$, et donc $c_{ii}=1$, ce qui est généralement le cas lorsqu'on n'accorde pas d'importance à l'ordre de comparaison entre les éléments d'une paire[12]. Le nombre de comparaisons passe alors de n^2 à $n(n-1)/2$.
- Des méthodes autorisent les décideurs à émettre plusieurs opinions différentes par comparaison[13] ainsi qu'à omettre de se prononcer sur une ou plusieurs comparaisons[14], cela autorisant une plus grande souplesse d'utilisation. On a alors affaire à une matrice $M=(c_{ijk})$, avec $k=0,...,d_{ij}$, d_{ij} étant le nombre d'opinions par comparaison.

---

[9] Certaines méthodes utilisent plutôt au sein de la matrice des *parts d'importance relative* (voir aussi chapitre 6), c'est-à-dire $c^*_{ij} \approx p_i / (p_i + p_j)$, $i, j = 1...n$. Il est ainsi peut-être plus pratique de se représenter l'importance de l'élément *i* relativement à celle de *i* plus *j* (« l'élément i représente 30% du total… »). Néanmoins, on remarquera que la matrice M se déduit directement de M^* par $c_{ij} \approx 1/(1 - 1/c^*_{ij})$, $i, j = 1...n$. Or dans toute la littérature, ce sont les c_{ij} qui sont employés.

[10] Ce jeu de poids est unique lorsque la matrice *M* de comparaisons est cohérente, voir définition plus loin.

[11] Le système est surcontraint. Il n'a normalement pas de solution.

[12] Remarquons que l'ordre de comparaison de deux éléments peut avoir de l'importance dans certains protocoles. Imaginons la comparaison de deux vins : le premier vin goûté modifie le palais.

[13] Il s'agit de considérer plusieurs c_{ij} provenant de plusieurs décideurs, la synthèse des jugements n'ayant alors plus besoin d'être faite au niveau de chaque comparaison.

[14] Lorsque $n=8$, le nombre de comparaisons à donner dans le cas d'une matrice réciproque est $n(n-1)/2=28$. Nécessiter d'estimer 28 rapports peut sembler excessif avant d'avoir une estimation du résultat. D'autant plus qu'il se trouve toujours des paires d'éléments difficiles à comparer.

Malgré cette variété de méthodes et les divergences de résultats, ces méthodes ne sont pas des « moulinettes » prédisant n'importe quoi. Notamment toutes les méthodes de CP[15] doivent prédire le même jeu de poids en cas de *matrice cohérente*. Une matrice cohérente est une matrice M dont les comparaisons sont réellement égales à un rapport de 2 poids[16]. Il y a très peu de chances que dans la réalité une telle matrice émerge si on quantifie indépendamment les comparaisons. En construisant donc une telle matrice à partir d'un jeu de poids donné $(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n)$, soit $M^c = (p_i / p_j)$, toute méthode de CP doit prédire en sortie le même jeu de poids $(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n)$. Si ce n'est pas le cas, la méthode n'est pas capable de prédire ce qu'on lui a injecté, il s'agit donc d'une déformation inutile et nuisible. Il est très simple de vérifier cette propriété par un test. On notera que des méthodes dites de « Tri Croisé » actuellement utilisées par des praticiens n'ont pas cette propriété.

Donnons tout de suite un exemple, prenons la matrice de la figure 1. Celle-ci est cohérente car toutes les comparaisons sont compatibles avec $e_3=2.e_2=6.e_1$. Ceci doit donc nous amener en considérant 6 parts pour e_3, 3 parts pour e_2, et 1 part pour e_1 au résultat : $e_1=10\%$, $e_2=30\%$, $e_3=60\%$, quelque soit la méthode.

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	1/3	1/6
e_2	3	1	1/2
e_3	6	2	1

Figure 1 : Exemple de matrice de comparaisons cohérente

Or, les méthodes de Tri Croisé de base qu'on trouve dans certains manuels préconisent de remplir la demi-matrice avec l'élément le plus important de la paire, accompagné d'un chiffre 0, 1, 2 ou 3 selon le degré de supériorité (0 : équivalent, 1 : légèrement supérieur, 2 : supérieur, 3 : très supérieur). En appliquant cette recette au mieux on trouve $e_1=0\%$, $e_2=29\%$, $e_3=71\%$, les poids étant estimés au prorata des points récoltés :

$$M = \begin{array}{c|cc|} & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2:2 & e_3:3 \\ e_2 & & e_3:2 \end{array} \rightarrow p = \begin{pmatrix} e_1 = 0/7 = 0\% \\ e_2 = 2/7 = 29\% \\ e_3 = 5/7 = 71\% \end{pmatrix}$$

Adopter un chiffrage de la comparaison plus précis (de 0 à 100 au lieu de 0 à 3 par exemple) ne changera rien à l'affaire, au contraire. En effet, on voit qu'on aura de toute façon l'élément le moins important égal à 0%. De plus on ne peut même pas se fier au classement (hiérarchisation) donné par ces méthodes. On notera que cette méthode ou des méthodes similaires sont actuellement utilisées en entreprise et mises en œuvre dans des logiciels commercialisés !

Que faire alors ? Eh bien utiliser des méthodes *exactes*, validées par la communauté scientifique. Les méthodes de CP ont fait l'objet de recherches sérieuses dans le domaine de *l'aide à la décision* et de la *recherche opérationnelle*. Elles ont permis de prendre des décisions dans les domaines politiques, sociaux et économiques et notamment dans les domaines du management des entreprises et de l'ingénierie (conception de produits et gestion de projets). C'est ce que nous verrons dans un prochain article.

---

[15] Celles qui sont « correctes » et qui devraient subsister.

[16] Le système d'équations est alors de rang n et non n^2 ou $n(n-1)/2$ en cas de réciprocité, et comme on a n inconnues, le système a une solution et une seule.

3. Références

[1] **Allen J.F.**, (2001), *On the Aggregation of Preferences in Engineering Design*. in *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Pittsburgh, USA/PA, sept 9-12, 2001, Paper number DETC2001-DAC21015.

[2] **Arrow K.J.**, (1951), *Social Choice and Individual Values*, New-York, John Wiley.

[3] **Chevenier C. , Yannou B.**, (2001), *Maitrise des performances et des risques de projet - Enseignements d'application de SPEC à des cas industriels.* RFGI : Revue Française de Gestion Industrielle, Numéro spécial sur le Management par la Valeur, avril 2001, vol. 20(2 (avril 2001)).

[4] **Fernandez M.G., Seepersad C.C., Rosen D.W., Allen J.K. , Mistree F.**, (2001), *Utility-Based Decision Support for Selection in Engineering Design*. in *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Pittsburgh, USA/PA, sept 9-12, 2001, Paper number DETC2001-DAC21106.

[5] **Hazelrigg G.A.**, (1996), *The Implications of Arrow's Impossibility Theorem Approaches to Optimal Engineering Design.* Journal of Mechanical Design, vol. 118: p. 161-164.

[6] **Hazelrigg G.A.**,(1997)*On Irrationality in Engineering Design.* Journal of Mechanical Design, vol.119.

[7] **Herman M.W. , Koczkodaj W.W.**, (1996), *A Monte Carlo study of pairwise comparison.* Information Processing Letters, vol. 57: p. 25-29.

[8] **L'Eglise T., De Lit P., Danloy J., Rekiek B. , Delchambre A.**, (2000), *A multi-criteria decision-aid method for material handling equipment selection*. in *IDMME2000 : Third International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Montréal, .

[9] **Lootsma F.A.**, (1982), *Performance evaluation of nonlinear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis*. M.J.D. Powell ed. Nonlinear Optimization 1981, ed. Press A. Vol. 1, London. 419-453.

[10] **Otto K. , Antonsson E.**, (1993), *The Method of Imprecision Compared to Utility Theory for Design Selection Problems*. in *ASME/DTM '93: Design Theory and Methodology*, , 167--173.

[11] **Pahl G. , Beitz W.**, (1984), *Engineering Design*. The Design Council, London, Springer.

[12] **Roy B.**, (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, SERIE : Production et techniques quantitatives appliquées à la gestion, ed. Gestion C., , Economica.

[13] **Saaty T.L.**, (1977), *A scaling method for priorities in hierarchical structures.* Journal of Mathematical Psychology, vol. 15(3): p. 234-281.

[14] **Saaty T.L.**, (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, New-York, McGraw-Hill.

[15] **Thurston D.L. , Liu T.**, (1991), *Design Evaluation of Multiple Attributes Under Uncertainties.* International Journal of Systems Automation - Research and Application (SARA), vol. 1: p. 143-159.

[16] **Thurstone L.L.**, (1927), *A law of comparative judgments.* Psychological Reviews, vol. 34: p. 273-286.

[17] **Yannou B. , Hajsalem S.**, (2001), *Comparaison des apports de l'Analyse de la Valeur et de la méthode SPEC sur un cas industriel*. in *PRIMECA'2001 : Septième Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée*, La Plagne, France, 422-432.

[18] **Hazelrigg G.A.**, (1998), *A Framework for Decision-Based Engineering Design.* Journal of Mechanical Design, vol. 120(4): p. 653-658.